Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros-RN
2ª Olimpíada de Cálculo da Ufersa

PROVA DA SEGUNDA FASE
Expectativa de resposta

1. O valor de uma conta de energia elétrica é calculado com base no consumo, conforme o quadro abaixo:

Consumo (em kWh)	Valor do kWh (em R$)
Até 60	0,40
de 61 a 100	0,60
de 101 a 300	0,80
acima de 300	1,20

Por exemplo, se num determinado mês o consumo foi de 70 kWh, o consumidor será tarifado pelos primeiros 60kWh na primeira faixa e o excedente na segunda faixa. Seguindo este raciocínio, determine a expressão da função que modela o custo da conta de energia elétrica em função do consumo.

SOLUÇÃO:

$$f(x) = \begin{cases} 0,40x & \text{se } 0 \leq x \leq 60 \\ 0,60(x-60)+24 & \text{se } 60 < x \leq 100 \\ 0,80(x-100)+48 & \text{se } 100 < x \leq 300 \\ 1,20(x-300)+208 & \text{se } x > 300 \end{cases}$$

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{9x^2-4}{3x+2}$.

(A) Calcule o limite $\lim\limits_{x\to -2/3} f(x)$.

(B) Determine um valor $\delta > 0$ tal que, para todo x satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$, torne a desigualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ verdadeira dentro da tolerância $\epsilon = 0,03$.

SOLUÇÃO:

(i) $\lim\limits_{x\to -2/3} \dfrac{9x^2-4}{3x+2} = \lim\limits_{x\to -2/3} \dfrac{(3x+2)(3x-2)}{3x+2}$

Se $x \neq -2/3$, tem-se que o esse último limite se reduz a

$\lim\limits_{x\to -2/3}(3x-2) = 3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -4$, e portanto, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -2/3} \dfrac{9x^2-4}{3x+2} = -4}$.

(ii) Dado $\epsilon > 0$, deve-se encontrar um $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$0 < \left|x + \frac{2}{3}\right| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(3x-2)+4| < \epsilon$$

ou seja,

$$-\frac{2}{3} - \delta < x < -\frac{2}{3} + \delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-2-\epsilon}{3} < x < \frac{-2+\epsilon}{3}$$

O valor de δ procurado é encontrado comparando-se os lados das duas inequações acima, de onde encontra-se $\delta = \epsilon/3$.

Portanto, para $\epsilon = 0,03$, encontra-se $\delta = \epsilon/\mathbf{3} = \mathbf{0,03/3 = 0,01}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 24} & \text{se } x \neq -3 \\ 2p - 1 & \text{se } x = -3 \end{cases} .$$

Para que a função f seja contínua no ponto $x = -3$, qual deve ser o valor de p?

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 24} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)}$$

Se $x \neq -3$, tem-se que o esse último limite se reduz a

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-2}{2(x-4)} = \frac{5}{14} .$$

Então, devemos ter

$$2p - 1 = \frac{5}{14} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p = \frac{19}{28}} .$$

4. Suponha que uma função f satisfaz as seguintes condições para quaisquer valores reais de x e y:

(A) $f(x+y) = f(x)f(y)$;

(B) $f(x) = 1 + xg(x)$, onde $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Mostre que a derivada f' existe em qualquer x e é dada por $f'(x) = f(x)$.

SOLUÇÃO:

Como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e por (A) e (B)

$$f(x+h) = f(x)f(h) \qquad \text{e} \qquad f(h) = 1 + hg(h) \;\Rightarrow\; f(h) - 1 = hg(h)$$

segue que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)[f(h) - 1]}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{hg(h)}{h} = f(x)$$

lembrando que, pela condição (B), $\lim_{h \to 0} g(h) = 1$.

5. Quais as dimensões de uma folha de 200 cm^2 para que possua a maior área de impressão, sabendo que as seguintes margens devem ser respeitadas: margens laterais de 3 cm, margem superior de 5 cm e margem inferior de 4 cm?

SOLUÇÃO:

Temos que a área impressa A_i será definia como

$$A_i = (w - 6)(h - 9) .$$

Pela restrição $200 = wh$, temos

$$A_i = (w-6)\left(\frac{200}{w} - 9\right) = \frac{-1200}{w} - 9w + 254 \quad .$$

A primeira e segunda derivadas são

$$A_i' = \frac{1200}{w^2} - 9 = \frac{1200 - 9w^2}{w^2}$$

$$A_i'' = -2400/w^3 \quad .$$

Assim, achando os pontos críticos

$$w = 0, w = \pm\sqrt{\frac{1200}{9}} = \pm\frac{20\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Como apenas valores positivos fazem sentido físico, e para $w > 0$ a segunda derivada é sempre negativa, temos a área máxima em

$$w = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{h = 10\sqrt{3}} \quad .$$